

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

**Программа государственной итоговой аттестации
Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена по математике**

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий
курс:	4
квалификация:	бакалавр
семестр:	8 (Весенний)
Программу составил:	А.Ю. Петрович, канд. физ.-мат. наук, доцент
Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 13.03.2025	

1. Цели и задачи

Цели

Целью государственного экзамена по математике является установление уровня подготовки обучающегося по математическим дисциплинам и соответствия результатов освоения обучающимся образовательной программы требованиям образовательного стандарта по направлению подготовки.

Задачи

- оценка степени освоения обучающимися теоретических положений основных дисциплин, формирующих специальные знания в рамках освоения образовательной программы;
- оценка умения применять полученные знания для решения конкретных задач.

2. Перечень компетенций, уровень сформированности которых оценивается при проведении государственного экзамена

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

3. Перечень примерных вопросов, выносимых на государственный экзамен

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности.
2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней.
3. Теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.
4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.
5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа.
6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.
7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте.
8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.
9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.
10. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия, достаточные условия.
11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.
14. Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости.
15. Формула Остроградского-Гаусса. Соленоидальные векторные поля.
16. Формула Стокса.
17. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
18. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.
19. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
20. Прямые и плоскости в пространстве. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве. Углы между прямыми и плоскостями.
21. Кривые второго порядка, их геометрические свойства.
22. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
23. Линейное пространство, базис и размерность. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица. Ядро и образ линейного отображения.
24. Собственные значения и собственные векторы линейных преобразований. Диагонализируемость линейных преобразований.
25. Самосопряженные преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов.
26. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
27. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью-квазимногочленом.
28. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения.
29. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского.
30. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия локального экстремума.
31. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость событий и классов событий.
32. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства. Вычисление для нормального распределения.
33. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.
34. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией.

4. Порядок сдачи государственного экзамена

Государственный экзамен состоит из двух обязательных частей — письменной и устной.

Перед государственным экзаменом проводятся консультации обучающихся по вопросам программы государственного экзамена.

Письменная часть содержит от 16 до 20 задач, на решение которых отводится 3 часа. По итогам проверки письменной работы выставляется оценка за письменную часть по 10-балльной шкале.

Устная часть экзамена включает в себя анализ письменной работы и ответ студента на вопросы экзаменационного билета. По результатам анализа письменной работы студент имеет право высказать несогласие с выставленной оценкой, экзаменационная комиссия разбирается в причинах разногласий, учитывая мнение студента и проверяющего работу преподавателя. При достаточных аргументах оценка за письменную работу может быть изменена в ту или другую сторону.

Экзаменационные билеты устной части содержат два вопроса из разных частей математических курсов. На подготовку к устному экзамену студенту отводится 1 час, на ответ не более 1 часа.

При подготовке к ответу и во время ответа на вопросы билета обучающийся может пользоваться только программой дисциплины.

На государственном экзамене не допускается использование технических электронных средств любого вида, а также посторонних материалов. Нарушение данных условий влечет удаление обучающегося с экзамена.

При выставлении итоговой оценки за государственный экзамен по математике учитываются успеваемость студента по математическим дисциплинам, его результаты на письменной части государственного экзамена и качество его ответа на устной части государственного экзамена. Итоговая оценка за государственный экзамен по математике выставляется коллегиально по итогам обсуждения комиссией и объявляются после окончания экзамена.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для проведения государственного экзамена

– аудитория для проведения консультаций и аттестационного испытания, оснащенная рабочими местами для обучающихся и государственной экзаменационной комиссии, доской, мультимедийным оборудованием.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Лекции по математическому анализу [Текст] / О. В. Бесов, М., Физматлит, 2020
2. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – Москва: Лаборатория знаний, 2023
3. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев, Санкт-Петербург, Лань, 2022
4. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – Москва: ЛЕНАНД, 2023.
5. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, учебное пособие для вузов / В. К. Романко. — М., Лаборатория знаний, 2020.— URL: <http://books.mipt.ru/book/301410> (дата обращения: 15.02.2021). - Полный текст (Режим доступа : из сети МФТИ / Удаленный доступ)

6. Лекции по математическому анализу [Текст]. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / Г. Е. Иванов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) 3-е изд., испр. и доп. М. : МФТИ, 2011. 318 с. + pdf - версия. - Предм. указ.: с. 313-317. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0368-7 (в пер.).
7. Лекции по математическому анализу [Текст]. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие для вузов / Г. Е. Иванов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) 3-е изд., испр. и доп. М. : МФТИ, 2011. 188 с.+ pdf- версия. - Предм. указ.: с. 185-187. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0370-0 (в пер.).
8. Лекции по математическому анализу [Текст]. В 3 ч. Ч. 1. Введение в математический анализ : учеб. пособие для студентов 1 курса МФТИ / А. Ю. Петрович ; М-во образования и науки РФ ; Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). 2-е изд., испр. и доп. М. : МФТИ, 2017. 276 с. + pdf - версия. - Библиогр.: с. 274. - 600 экз. - ISBN 978-5-7417-0647-3 (в пер.).
9. Лекции по математическому анализу [Текст]. В 3 ч. Ч. 2. Многомерный анализ, интегралы и ряды : учеб. пособие для студентов 1 курса МФТИ / А. Ю. Петрович ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). 2-е изд., испр. и доп. М. : МФТИ, 2017. 270 с. + pdf - версия. - Библиогр.: с. 268. - 600 экз. - ISBN 978-5-7417-0649-7 (в пер.).
10. Лекции по математическому анализу [Текст]. В 3 ч. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ : учеб. пособие для вузов / А. Ю. Петрович ; М-во образования и науки, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). М. : МФТИ, 2018. 308 с. + pdf-версия. - Библиогр.: с. 306. - 600 экз. - ISBN 978-5-7417-0658-9 (в пер.).
11. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). 3-е изд., испр. и доп. М. : МФТИ, 2011. 544 с. +pdf. версия. - Библиогр.: с. 528. - Предм. указ.: с. 529-543. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0378-6 (в пер.).
12. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Боровков. / 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1986. 432 с. - Библиогр.: с. 429. - Предм. указ.: с. 430-431. - 53 000 экз. (в пер.).

Дополнительная литература

1. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. А. Розанов. М. : Наука, 1985. 320 с. - Предм. указ.: с. 319-320. - 23 000 экз. (в пер.).

7. Рекомендации обучающимся по подготовке к государственному экзамену

При подготовке к письменной части государственного экзамена обучающимся рекомендуется решить 2–3 варианта экзаменационных контрольных работ государственного экзамена за предшествующие годы. Эти варианты размещены на сайте кафедры высшей математики МФТИ.

При этом студенту рекомендуется выявить типы задач, в которых у него возникают трудности и обратить особое внимание на эти типы задач при подготовке к экзамену. Если возникают вопросы, которые студент не может самостоятельно решить с помощью рекомендуемой литературы, эти вопросы рекомендуется задать на консультации, проводимой преподавателем кафедры по соответствующей дисциплине.

При подготовке к устной части государственного экзамена обучающимся рекомендуется вспомнить темы математических дисциплин, входящие в программу устной части государственного экзамена, используя при необходимости конспекты лекций и рекомендуемую литературу. После повторения каждой темы обучающемуся рекомендуется самостоятельно написать формулировки и доказательства теорем, содержащихся в программе устной части государственного экзамена, без использования литературы и вспомогательных средств. Если это не удастся, то рекомендуется повторить данную процедуру.

8. Методика и критерии оценки государственного экзамена

Результаты сдачи государственного экзамена определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» означают успешную сдачу государственного экзамена.

Критерии оценок за письменную часть государственного экзамена:

За каждую задачу установлено определенное количество баллов, указанное в экзаменационном задании. Для получения за письменную часть оценки «отлично» студенту, как правило, необходимо набрать не менее 70–75% полной суммы баллов, для получения оценки «хорошо» — не менее 45–50%, для получения оценки «удовлетворительно» — не менее 20–25%.

Критерии оценок за устную часть государственного экзамена:

отлично (10) – правильный, четкий и уверенный ответ на оба вопроса билета и дополнительные вопросы;

отлично (9) – даны правильные ответы на оба вопроса билета и дополнительные вопросы с незначительными неточностями;

отлично (8) – даны ответы на оба вопроса билета и дополнительные вопросы после небольших исправлений и наводящих вопросов экзаменаторов;

хорошо (7) – даны ответы на оба вопроса билета, но нет верного ответа на один из дополнительных вопросов;

хорошо (6) – есть недочеты в ответе на один из вопросов билета и нет верного ответа на один из дополнительных вопросов;

хорошо (5) – есть недочеты в ответах на оба вопроса билета и нет верного ответа на один из дополнительных вопросов;

удовлетворительно (4) – есть недочеты в ответах на оба вопроса билета или нет ответа ни на один из дополнительных вопросов;

удовлетворительно (3) – нет ответа на один из вопросов билета, но есть ответы на дополнительные вопросы (возможно с недочетами);

неудовлетворительно (2) – нет ответа на один из вопросов билета и на дополнительные вопросы;

неудовлетворительно (1) – нет ответа ни на один из вопросов билета.

Итоговая оценка за государственный экзамен по математике определяется государственной экзаменационной комиссией с учетом оценки обучающегося за устную часть государственного экзамена и оценки за письменную часть государственного экзамена.

9. Особенности проведения государственной итоговой аттестации для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Для обучающихся из числа инвалидов государственная итоговая аттестация проводится с учетом особенностей их психофизического развития, их индивидуальных возможностей и состояния здоровья (далее – индивидуальные особенности).

9.1. При проведении ГИА обеспечивается соблюдение следующих общих требований:

– проведение государственной итоговой аттестации для инвалидов в одной аудитории совместно с обучающимися, не имеющими ограниченных возможностей здоровья, если это не создает трудностей для обучающихся при прохождении ГИА;

– присутствие в аудитории ассистента (ассистентов), оказывающего обучающимся инвалидам необходимую техническую помощь с учетом их индивидуальных особенностей (занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, общаться с членами ГЭК);

– пользование необходимыми обучающимся инвалидам техническими средствами при прохождении ГИА с учетом их индивидуальных особенностей;

– обеспечение возможности беспрепятственного доступа обучающихся инвалидов в аудитории, туалетные и другие помещения, а также их пребывания в указанных помещениях.

9.2. По письменному заявлению обучающегося инвалида продолжительность сдачи обучающимся инвалидом государственного аттестационного испытания может быть увеличена по отношению к установленной продолжительности его сдачи:

– продолжительность сдачи государственного экзамена, проводимого в письменной форме, – не более чем на 90 минут;

– продолжительность подготовки обучающегося к ответу на государственном экзамене, проводимом в устной форме, – не более чем на 20 минут.

9.3. Обучающийся инвалид не позднее, чем за 3 месяца до начала проведения ГИА подает письменное заявление о необходимости создания для него специальных условий при проведении государственных аттестационных испытаний с указанием особенностей его психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья. К заявлению прилагаются документы, подтверждающие наличие у обучающегося индивидуальных особенностей (при отсутствии указанных документов в дирекции института).

В заявлении обучающийся указывает на необходимость (отсутствие необходимости) присутствия ассистента на государственном аттестационном испытании, необходимость (отсутствие необходимости) увеличения продолжительности сдачи государственного аттестационного испытания по отношению к установленной продолжительности.

10. Примеры контрольных заданий, билетов

Примеры заданий приведены в приложении

Пример письменной работы государственного экзамена по математике

1.③ Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg}^2 x) - \ln(1 + x^2 + x^3)}{\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{ch} x - 1)}{x} - \frac{x}{2}}.$

2.③ Найти асимптоты, точки локального экстремума и перегиба и построить график функции $y = -3x + 1 - \frac{3}{x - 4}.$

3.④ Найти $df(1; 1)$ и $d^2 f(1; 1)$ функции $f(x, y) = \ln^2(3 - x^3 - y^4).$

4.④ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{(2+x)^4}\right)}{\ln^3(3+x)x^{2\alpha}} dx.$

5.④ Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x e^n \operatorname{arctg} \frac{x}{4^n},$ на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty).$

6.④ Представить функцию $f(x) = \operatorname{tg}(x + 2)^3 + |x + 2|^3 \sin(x + 2)^2$ формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $x_0 = -2$ до максимально возможного порядка. Ответ обосновать.

7.⑤ В прямоугольной декартовой системе координат найти канонические уравнения прямолинейных образующих поверхности $(x - y - 3)(x + y + 1) = 5z,$ проходящих через точку $A(-1; 1; -1).$

8.② В общей декартовой системе координат прямая задана пересечением плоскостей

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ 4x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Найти каноническое уравнение прямой.

9.③ Найти общее решение системы линейных уравнений с 5 неизвестными, указать частное решение и ФСР однородной системы: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 7; \\ -2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 2x_5 = 18. \end{cases}$

10.② В евклидовом пространстве подпространство L задано системой линейных уравнений с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -17 \\ 2 & -13 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в ОНБ. Найти базис в ортогональном дополнении L^\perp подпространства L .

11.⑤ Исследовать условные экстремумы функции $u(x; y) = 2x + 2y - 1$ относительно уравнения связи $x^2 + 4xy + y^2 - 6 = 0$.

12.⑤ Записать кратный интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$ в виде повторного интеграла или суммы повторных интегралов с разными порядками интегрирования, если область G задана неравенствами: $x^2 + (y - 3)^2 > 9$; $0 < y < 3$; $2x + y < 9$; $x > 0$.

13.② Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = \frac{5}{2} - x$, $x \in [0; \frac{5}{2}]$ по системе функций $\left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi x}{5} \right\}_{k=1}^{+\infty}$ на одном периоде. Коэффициенты Фурье не вычислять! Исследовать ряд Фурье на равномерную сходимость.

14.④ Найти все действительные решения системы линейных дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y; \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$ Найти положение равновесия автономной системы, определить его характер и нарисовать фазовые траектории системы в окрестности положения равновесия.

15.③ Составить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами наименьшего порядка, имеющее частные решения: $y_1 = e^x$, $y_2 = x \sin 2x$.

16.⑤ Решить задачу Коши:

$$y^2 (y^2 + 1) y'' - y^3 y'^2 + (y^2 + 1)^{3/2} y' = 0; \quad y(0) = \sqrt{3}; \quad y'(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

"Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено"

С положением ознакомлен: _____ (Фамилия студента)

Пример устного государственного экзамена по математике

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 1

Дисциплина: Государственный экзамен по математике

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности.
2. Простейшая задача вариационного исчисления.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 2

Дисциплина: Государственный экзамен по математике

1. Применение производной к исследованию локальных экстремумов и точек перегиба функций одной переменной.
 2. Линейное пространство, базис и размерность. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица. Ядро и образ линейного отображения.
-